Resolvendo Problemas de Juros Compostos utilizando a Regra da Falsa Posição Dupla: um resgate histórico

Resolving Compound Interest using the Rule of Double False Position: a historical review

Resolución de Interés Compuesto usando la Regla de Doble Posición Falsa: una rescate histórica

No presente artigo, será apresentado um breve histórico sobre onde e como surgiram os juros. Será comentado sobre o surgimento do número e e sobre a criação dos logaritmos, pois, ambos estão “entrelaçados”. Finalmente, será mostrado que o resgate do método da regra da falsa posição dupla pode ser útil na resolução de problemas de juros compostos.

In this paper, a brief history will be presented on where and how the interest emerged. Will be discussed on the rise in the number and the creation of logarithms, because both are “intertwined”. Finally, it will be shown that the rescue of the method of rule of double false position can be helpful in solving compound interest problems.

En este artículo, una breve historia se presentará en dónde y cómo surgió el interés. Se discutirá sobre el aumento en el número y la creación de los logaritmos, porque ambos están “entrelazados”. Por último, se muestra que el rescate del método de la regla de doble posición falsa puede ser útil en la solución de problemas de interés compuesto.

Palavras-chave: Juros compostos, História, Regra da Falsa Posição Dupla.

Autores:

Carlos Alberto Martins de Assis

Mestrando em Matemática Aplicada pela FGV/RJ, Especialista em Matemática pela UFF-Niterói, Professor Auxiliar I da Estácio de Sá – Campus Cabo Frio.

Email: carlosalbertodeassis@gmail.com

Introdução

Segundo D’AMBROSIO (1972), os juros e os impostos existem desde a época dos primeiros registros de civilizações existentes na Terra. Nas citações mais antigas, os juros eram pagos pelo uso de sementes ou de outras conveniências emprestadas; os juros eram pagos sob a forma de sementes, prata ou de outros bens. Muitas das práticas existentes originaram-se dos antigos costumes de empréstimo e devolução de sementes e de outros produtos agrícolas.

Na Idade Média surgiu o costume de se guardar os valores com ourives, ou seja, era uma pessoa que negociava objetos de ouro e prata. E como garantia ficavam com um recibo que com o tempo acabou sendo usado para efetuar pagamentos, dando origem à “moeda de papel”. Ficava assim instituída a figura do banco.

Pode-se afirmar que o surgimento do juro como remuneração pelo uso da cessão de dinheiro para terceiros ocorreu juntamente com o surgimento da moeda, por volta do século VII a. C., na Lídia, reino da Ásia Menor, região que hoje corresponde a Turquia e o Iraque. As moedas eram peças feitas de metal, que substituíam as mercadorias e iam organizar a comercialização de produtos. Durante muito tempo possuíam um valor real que dependia, portanto, do material de que eram feitas, ao contrário do que acontecesse hoje, quando as moedas têm valor nominal.

Os anos de 1450 a 1650 constituem um período histórico em que os termos *depositum*, do latim *ponere* (por), *juro* (jurar) e *credere* (acreditar) começam a aparecer com frequência e a ser usados no cotidiano das pessoas, surgindo, então, a matemática financeira como uma ferramenta essencial para a vida de todo comerciante, banqueiro e homem de negócios.

Contexto Histórico

De acordo com GIOVANNI e GIOVANNI JR (2005), existem diversas teorias que tentam explicar porque os juros existem. Uma delas é a teoria da escola austríaca, primeiramente desenvolvida por Eugen Von Boehm-Bawerk. Ela afirma que os juros existem por causa da manifestação das preferências temporais dos consumidores, já que as pessoas preferem consumir no presente do que no futuro. A origem de empréstimos com juro é remota. Na Idade Média, os juros cobrados eram de até 43% ao ano para empréstimos pessoais, e variavam de 12% a 24% ao ano nas transações comerciais. Quando o primeiro banco – a Casa di San Giorgio – foi fundado em 1586, em Gênova, na Itália, os juros cobrados giravam em torno de 10% ao ano.

As primeiras transações comerciais de que se tem notícia foram às trocas de mercadorias. Preocupado com os bens que poderia acumular, o homem começou a trocar o excedente do que produzia por mercadorias que lhe fossem mais convenientes. É daí que vem o termo “salário”, quantidade de sal que era dada como pagamento.

Por volta de 575 a. C., a Babilônia sediava alguns “escritórios banqueiros” que cobravam altas taxas pelo dinheiro que emprestavam a fim de financiar o comércio internacional da época. O juro era pago como uma recompensa pelo dinheiro emprestado, como aluguel. Documentos históricos redigidos pela civilização Suméria¹ por volta de 3000 a.C., revelam que o mundo

¹ Muitos povos além dos babilônicos, como os sumérios habitavam a mesma área.

antigo desenvolveu um sistema formalizado de crédito baseado em dois principais produtos, o grão e a prata. Antes de existirem as moedas, o empréstimo de metal era feito baseado em seu peso. Arqueólogos descobriram pedaços de metais que foram usados no comércio nas civilizações de Tróia, Babilônia, Egito e Pérsia. Antes do empréstimo de dinheiro ser desenvolvido, o empréstimo de cereal e de prata facilitava a dinâmica do comércio.

Para ter uma ideia, os sumérios antigos deixaram registrados em tábuas, vastos conhecimentos sobre a matemática comercial e financeira, isto é, os sumérios já demonstravam conhecimentos que iam desde notas promissórias, juros simples e compostos e faturas, até hipotecas e escrituras de venda. Os sumérios utilizavam tábuas na realização de seus cálculos. Em alguns casos, era necessário o uso de várias tábuas de cálculo, devido à dificuldade do problema.

Os museus de Paris, Berlim e Louvre e as Universidades de Yale, Colúmbia e Pensilvânia contêm coleções dessas tábuas envolvendo problemas sobre juros compostos. Por exemplo, em Louvre aparece um problema de 1700 a. C. O problema é o seguinte: “quanto tempo deve-se aplicar certa soma de dinheiro a juros compostos anuais de 20% para que ela dobre?”. Os arqueólogos nos tempos atuais têm obtido de suas escavações cerca de 500.000 tábuas de barro com escritura cuneiforme. Perto de 400 dessas tábuas são de matemática, e cerca de metade são tábuas referentes à matemática financeira.

O que é a Regra da Falsa Posição Dupla?

Um dos métodos mais antigos de aproximação das raízes reais de uma equação é a regra conhecida como *regula duorum falsorum*, muitas vezes chamada de *regra da falsa posição dupla*. Supostamente, já antes de Cristo, os babilônios e os chineses usavam essa regra. Esse método aparece nos *capítulos sobre a Arte da Matemática*, e se espalhou pela Índia e pela Arábia. De maneira abreviada, e em forma moderna, o método é este: para resolver uma equação $f(x) = 0$, admite-se que, em tal momento, dois valores “falsos” para x : x_1 e x_2 . Com efeito, iremos calcular $f(x_1)$ e $f(x_2)$ de modo que, possuam o menor erro possível, isto é, estejam bem próximos de zero. Daí, a intersecção da corda de extremidades $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ com eixo das abscissas, dá uma aproximação x_3 da raiz procurada (figura

abaixo), ou seja, a proporção $\frac{f(x_1)}{x_3 - x_1} = \frac{-f(x_2)}{x_2 - x_3}$ retirada da figura

abaixo dará essa aproximação para x_3 . Em outras palavras,

$$\text{teremos } x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}.$$

O processo pode ser repetido com o par apropriado x_1, x_3 ou x_3, x_2 e essa regra, não se restringe somente na resolução de equações algébricas, a mesma pode ser aplicada, por exemplo, a equações transcendentais.

Figura 1 – Determina a raiz x_3 procurada

Hoje em dia, reconhecemos a regra da dupla falsa posição como um processo de aproximação, em que o arco de uma curva é substituído por um segmento de reta secante e exige, no caso não linear, cuidados especiais para que a solução obtida seja realmente uma “solução aproximada”. É o que chamamos de processo da *interpolação*.

O Surgimento do Número e

Leonhard Euler (1707-1783) foi o homem que depois de Newton é o mais mencionado pelos seus trabalhos em favor de matemática clássica, ele atuou em diversos campos como a análise, teoria dos números, mecânica, hidrodinâmica, cartografia, topologia e teoria do movimento lunar. Leonhard Euler nasceu em Basileia em 1707, filho de um pastor luterano e que também pela vontade do pai seguiria também o sacerdócio. Mas seu pai, Paul Euler era também versado em matemática, assunto que estudara sob a tutela de Jakob Bernoulli. Os Bernoulli (foi uma família que dominou o cenário matemático da Europa nos últimos anos do século XVII e durante a maior parte do século XVIII), também tiveram certa influência na decisão de Paul ao apoiar seu filho a estudar matemática. O irmão de Jakob, Johann, deu lições particulares de matemática ao jovem Euler e convenceu Paul a deixar o filho seguir a própria vocação. Em 1720 Euler ingressou na Universidade de Basileia, onde se graduou em apenas dois anos. A primeira aparição do número e foi em um de seus trabalhos publicado em 1736 no qual ele estabeleceu as fundamentações da mecânica analítica.

Não existe um consenso geral da escolha de Euler para simbolizar o número $2,71828\dots$, que é igual a e . De acordo com alguns pontos de vista, Euler era um homem modesto demais para dar a um número a primeira letra de seu nome, presumi-se que ele tenha decidido por causa da palavra exponencial começar com e . No entanto, Leonard Euler em 1737 mostrou que e é irracional. A sua transcendência (não pode ser uma solução para uma equação polinomial com coeficientes inteiros) foi publicada em 1873 por um matemático francês, chamado Charles Hermite (1822-1901) num ensaio de mais de trinta páginas. Euler, com cerca de 700 trabalhos, entre livros e artigos, é sem dúvida o mais prolífico e versátil matemático de todos os tempos. Os originais que deixou com a Academia de S. Petersburgo ao morrer eram tantos que sua publicação só foi concluída 47 anos depois. E diga-se que Euler perdeu a visão em 1766, o que obrigou, a partir de então, a ditar suas ideias a algum filho ou a secretários.

Para julgar um gênio, só outro gênio. E Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) dizia a seus alunos: “Leiam, leiam Euler, ele é o nosso mestre em tudo”.

Na matemática financeira podemos ver o número e na fórmula do cálculo de montante, onde, S = montante, P = capital, r = juros percentual, t = tempo e n = composição de

juro feito ao ano. Se tomarmos a fórmula $S = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^t$,

e fizermos $P = \$1$ e $t = 1$ ano, podemos construir a seguinte tabela:

n	$P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^t$
1	2
5	2,48832
10	2,59374
50	2,69159
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
1.000.000	2,71827
1.000.000	2,71828
10.000.000	2,71828

A Criação dos Logaritmos

Certamente não era nada confortável uma viagem de Londres a Edimburgo no distante ano de 1615. Em veículos puxados a cavalos, por estradas esburacadas e poeirentas, o percurso parecia interminável. Mas para o eminente professor Henry Briggs (1556-1630), que ocupava no Gresham College de Londres a primeira cátedra de matemática criada na Inglaterra, valia a pena o sacrifício. Afinal, ia conhecer Jonh Neper (1550-1617), que no ano anterior tornara pública uma invenção sua que sacudira a matemática da época: os logaritmos.

O nobre escocês John Napier, Barão de Murchiston, ao contrário de Briggs, não era matemático profissional. Além de administrar suas propriedades, dedicava-se a escrever sobre vários assuntos. Às vezes sem conseguir se livrar dos preconceitos da época, como num trabalho de 1593 em que procurava mostrar que o papa era o anticristo e que o Criador pretendia dar fim ao mundo entre 1688 e 1700.

Às vezes como um visionário iluminado, como previu os submarinos e os tanques de guerra, por exemplo. Às vezes com a ponderação de um autêntico cientista, como no caso dos logaritmos, em cuja criação trabalhou cerca de 20 anos.

O termo *logaritmo* foi criado por Napier. Os termos “*logos*” e “*aritos*” significam, respectivamente, “razão” e “número”. E a obra em que, no ano de 1614, apresentou essa sua descoberta, recebeu o título de *Mirifice logarithmorum canonis descriptio* (ou seja, *Uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos*). Nela Napier explica a natureza dos logaritmos, segundo sua concepção, e fornece uma tabela de logaritmos.

Napier também estava ansioso por conhecer Briggs, a ponto de se decepcionar com o atraso de sua chegada, achando que não viria. Consta que ao se verem ficaram vários minutos sem conseguir articular nenhuma palavra. Durante o mês que Briggs passou em Edimburgo, certamente o assunto dominante de suas conversas com Napier foram os logaritmos. E acabaram concordando que uma tabela de logaritmos de base 10 seria mais útil. Considerando as propriedades da época, Briggs e Napier acertaram nessa opção. Mas, com o advento das calculadoras

manuais e dos computadores, as tábuas de logaritmos perderam sua utilidade.

O nome *neperiano* também foi atribuído por Napier. Assim, o sistema de logaritmos neperianos é o sistema de base $e = 2,7182\dots$. O nome *natural* se deve ao fato de que os estudos dos fenômenos naturais geralmente aparece uma lei exponencial de base e . Indicaremos o logaritmo neperiano pela notação $\ln(x)$.

Onde aparece os Juros Compostos?

A matemática financeira é um ramo da matemática aplicada. Mais precisamente, estuda o comportamento do dinheiro no tempo. Todo comprador sabe que numa compra a prazo o preço aumenta. Ou seja, na verdade está emprestando a um acréscimo de juros referente ao seu aluguel. Quando este juro é calculado sobre o montante de capital, chamamos de juros simples. Quando existe um juro periódico, vencido e não pago sendo somado ao capital emprestado, formando um montante sobre o qual é calculado o juro seguinte (juros sobre juros), chamamos de juro composto. A aplicação dos juros simples, nos dias de hoje, é quase nula, pois nas instituições bancárias, financeiras e lojas em geral a atualização monetária de seus empréstimos e financiamentos é calculada com base nos juros compostos.

Para exemplificar e usando a notação que usamos hoje para calcular problemas de juros compostos, considere os seguintes problemas a seguir:

Problema 1:

“Quanto tempo (aproximado) para que um capital qualquer duplique de valor, aplicado a juros compostos de 1% ao mês?”

Resolução: Se um capital qualquer C vai duplicar após um tempo t (meses), este problema em notação atual recai na seguinte equação exponencial $C(1,01)^t = 2.C$. C melhor, $(1,01)^t = 2$ (lembre-se que quando um valor aumenta de 1%, ele fica multiplicado pelo fator 1,01). Daí, usando logaritmos neperianos,

$$\text{temos que o valor do tempo será de } t = \frac{\ln(2)}{\ln(1,01)} \approx 69,660716 \text{ meses.}$$

Problema 2:

“A que taxa trimestral de juros compostos um capital deve ser aplicado durante 1 ano para que duplique de valor?”

Resolução: Se um capital qualquer C vai duplicar durante um tempo $t = 1$ (ano) que equivale a $t = 4$ (trimestres), este problema em notação atual recai na seguinte equação $C(1+i)^4 = 2.C$. Ou melhor, $(1+i)^4 = 2$ (lembre-se que o valor final de i deverá ser multiplicado por 100). Novamente, usando logaritmos neperianos, temos que o valor da taxa será de

$$\ln(1+i)^4 = \ln(2) \Rightarrow 4 \cdot \ln(1+i) = \ln(2) \Rightarrow \ln(1+i) = \frac{\ln(2)}{4} \Rightarrow i = e^{\frac{\ln(2)}{4}} - 1.$$

Ou melhor, $i \approx 0,189200905 \times 100 \approx 18,9200905\%$ ao trimestre.

Problema 3:

“Uma pessoa deseja aplicar R\$ 3.000,00 a juros compostos e no fim de 4 anos e 3 meses obter R\$ 15.424,80. Qual deve ser a taxa de juros ao ano?”

Resolução: Sendo o capital $C = 3.000,00$ e o tempo $t = 4$ anos e 3 meses (tempo não inteiro), este problema em notação atual recai na seguinte equação $3000(1+i)^{\frac{17}{4}} = 15.424,80$. Ou melhor, $(1+i)^{\frac{17}{4}} = 5,1416$ (Observe que $t = 4$ anos e 3 meses $= \left(4 + \frac{3}{12}\right) = \frac{17}{4}$ ano).

Novamente, usando logaritmos neperianos, temos que o valor da taxa será de

$$\ln(1+i)^{\frac{17}{4}} = \ln(5,1416) \Rightarrow \frac{17}{4} \cdot \ln(1+i) = \ln(5,1416) \Rightarrow \ln(1+i) = \frac{\ln(5,1416)}{\frac{17}{4}} \Rightarrow i = e^{\frac{\ln(5,1416)}{4,25}} - 1$$

Ou seja, $i \cong 0,46999931180 \times 100 \cong 46,999931180\%$ ao ano.

A Regra da Falsa Posição X A Notação Moderna

Para mostrar que a regra da falsa posição dupla e a notação moderna, ambos apresentam a resposta bem aproximada com um erro bem pequeno, vamos calcular até a sexta casa decimal, o valor de t no **problema 1** de equação $(1,01)^t = 2$ situado entre os valores “falsos” 69 e 70.

Sua solução fica:

Para $t_1 = 69 \Rightarrow f(t_1) = 1,01^{69} = 1,9868944$ e $t_2 = 70 \Rightarrow f(t_2) = 1,01^{70} = 2,0067633$. Então, a corda tem extremidades (69; 1,9868944) e (70; 2,0067633). Note que todos os valores são positivos, ou seja, caso contrário o problema não teria sentido. Assim, a aproximação procurada é:

$$t_3 = \frac{70 \times 1,9868944 + 69 \times 2,0067633}{1,9868944 + 2,0067633} = \frac{277,5492757}{3,9936577} \cong 69,497512.$$

Observe que o erro obtido foi bem pequeno, cerca de 0,23%.

Agora, para o **problema 2**, vamos calcular até a sétima casa decimal, o valor de i na equação $(1+i)^4 = 2$ situado entre os valores “falsos” 0,18 e 0,19. Isto é, para $i^1 = 0,18 \Rightarrow f(i_1) = 1,18^4 = 1,9387776$ e $i_2 = 0,19 \Rightarrow f(i_2) = 1,19^4 = 2,00533921$.

Então, a corda tem extremidades (0,18; 1,9387776) e (0,19; 2,00533921). Novamente, todos os valores são positivos, para que o problema tenha sentido. Assim, a aproximação procurada é:

$$i_3 = \frac{0,19 \times 1,9387776 + 0,18 \times 2,00533921}{1,9387776 + 2,00533921} = \frac{0,7293288018}{3,9936577} \cong 0,1826217609.$$

Portanto, $i^3 = 0,1826217609 \times 100 = 18,2621769\%$ ao trimestre. Note que o erro obtido foi de aproximadamente 0,65%. Na resolução do **problema 3**, o raciocínio é análogo ao **problema 2**.

Para aguçar a curiosidade do leitor, o presente artigo deixará listado abaixo alguns problemas que deverão ser resolvidos utilizando a regra da falsa posição dupla.

a) Durante quanto tempo um capital deve ser aplicado a juros compostos, à taxa de 2% ao mês, para que triplique o seu valor?

b) (FGV-SP) Uma máquina de lavar roupa é vendida à vista por R\$ 1.200,00 ou então a prazo com R\$ 300,00 de entrada mais uma parcela de R\$ 1.089,00 dois meses após a compra. Qual é a taxa mensal de juros compostos do financiamento?

c) (UF-PI) Um capital é empregado a uma taxa anual de 5% (juros compostos), calculada anualmente. Se o valor do montante, depois de t anos, é aproximadamente 34% maior do que o capital inicial, qual o valor de t ?

d) Qual a taxa efetiva de juro mensal para que o capital de R\$ 3.450,00, investido durante 2 anos, produza um montante de R\$ 21.877,07?

Considerações Finais

Os problemas de juros compostos que envolvem o cálculo do tempo e da taxa, hoje são resolvidos usando os logaritmos neperianos (ou logaritmos naturais). No entanto, resgatar um mecanismo que foi descoberto no passado (a regra da falsa posição dupla), pode ser útil na resolução de tais problemas. Isto é, pode também tornar o estudo mais significativo sem perder a

potencialidade que demanda para resolver problemas constituídos de juros compostos. A falta de base em relacionar os aspectos históricos com os aspectos de hoje, faz com que comumente os cálculos sejam efetuados mecanicamente através do uso de fórmulas, e que na maioria das vezes não compreendemos como foram determinadas.

Referências Bibliográficas

ASSIS, C.A.M. *Equações Algébricas: uma retrospectiva histórica e aplicações*. Monografia de Curso de Especialização em Matemática. Niterói: IM-UFF, 2006.

AABOE, A. *Episódios da História Antiga da Matemática*, Rio de Janeiro: Coleção do Professor de Matemática/Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2002.

BOYER, C. B. *História da Matemática*, São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

COURANT R., Robbins H. *O que é Matemática?*, Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2000.

CRESPO, A. A. *Matemática Comercial e Financeira fácil*, 14ª Ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2010.

CONTADOR, P. R. M. *Matemática, uma breve história*, São Paulo: Editora Livraria da Física, Vols. I e II, 2006.

DANTE, L. R. *Matemática: contexto & aplicações*, vol. 1. São Paulo: Editora Ática, 2007.

D'AMBROSIO, N. e D'AMBROSIO, U. *Matemática Comercial e Financeira e Complementos de Matemática para os cursos do 2º grau*. São Paulo: Companhia Editorial Nacional, 20ª edição, 1972.

GIOVANNI, J. R. e JÚNIOR, J. R. G. *Matemática: pensar & descobrir*. Nova edição. São Paulo: Editora FTD, 2005.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*, tradução: Hygino H. Domingues, São Paulo: Editora da Unicamp, 2004.

IEZZI, G. e outros. *Fundamentos da Matemática elementar*, vol. 2. Logaritmos. Editora Atual, 2005.

IEZZI, G. e outros. *Fundamentos da Matemática elementar*, vol. 11. Matemática Comercial, Matemática Financeira e Estatística Descritiva. Editora Atual, 2005.

MAOR, E. *e : A História de um Número*, Rio de Janeiro: Editora Record, 2004.